



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

GEOMETRÍA

**TEMA: SUPERFICIE ESFÉRICA
ESFERA Y TEOREMA DE PAPPUS**

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

OBJETIVOS

1

PRESENTAR LA SUPERFICIE ESFÉRICA ,ESFERA Y LAS DIFERENTES PARTES DE LAS MISMAS.

2

ESTABLECER LAS RELACIONES PARA CALCULAR LAS ÁREAS Y VOLUMENES DE LAS MISMAS.

3

APLICAR LO APRENDIDO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN UNI.



SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

TEOREMA DE ARQUIMEDES (SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN)

Cálculo del área de la superficie que genera una poligonal regular al girar respecto de una recta coplanar a dicha poligonal.

$A - B - C - D$ es la línea poligonal regular que generará a la superficie de revolución

Se cumple:

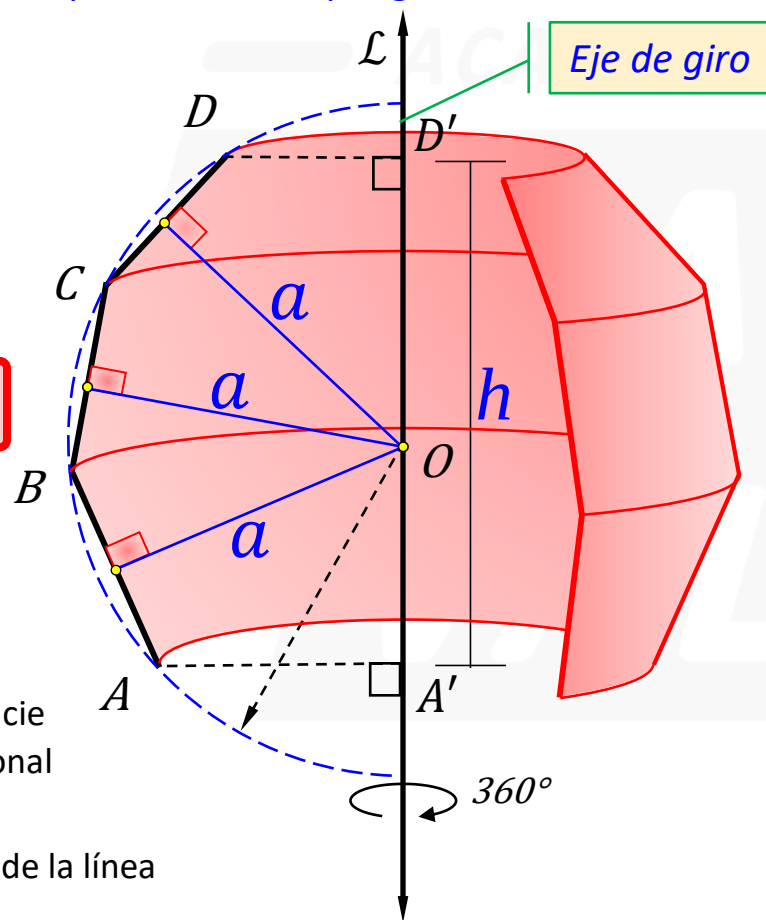
$$A_{Sup. Gen.} = 2\pi ah$$

Donde:

$A_{Sup. Gen.}$: Área de la superficie generada por la línea poligonal regular.

a : Longitud de la apotema de la línea poligonal regular.

h : Longitud de la proyección ortogonal de la línea poligonal regular sobre el eje de giro.



ÁREA DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

Si consideramos a la superficie esférica, como la superficie generada por una semicircunferencia alrededor de su diámetro, aprovechando el teorema de Arquímedes en su caso general, se puede calcular el área de la superficie esférica.

Semicircunferencia generadora

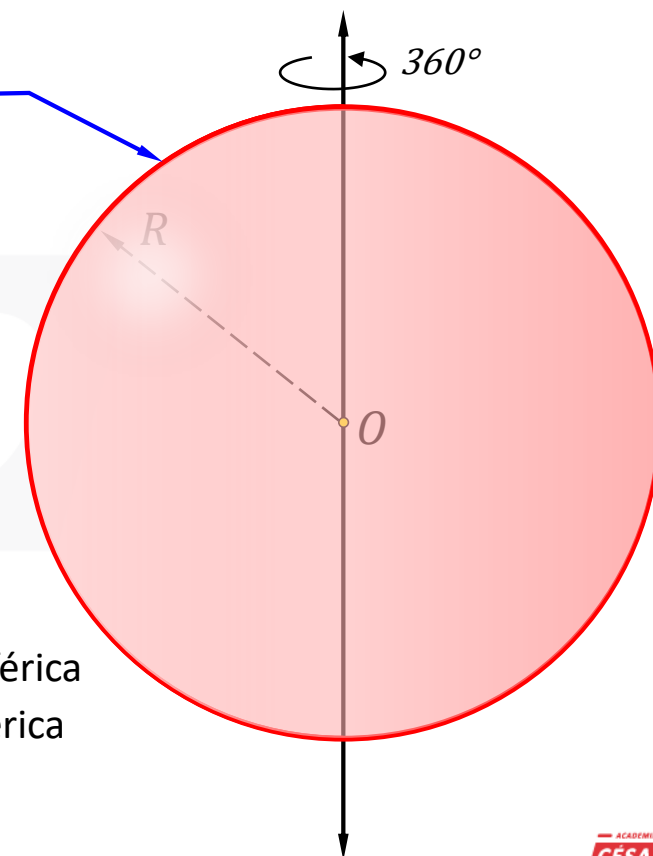
Se cumple:

$$A_{sup. esf.} = 4\pi R^2$$

Donde:

O : Centro de la sup. esférica

R : Radio de la sup. esférica



Es aquella superficie formada por todos los puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo al cual denominaremos centro

Plano secante

Todo plano secante
determina una
circunferencia

Plano tangente

T : punto de tangencia

Se cumple:

$\overline{OT} \perp \blacksquare \text{tangente}$

Circunferencia menor

Se determina cuando el plano secante no contiene al centro de la superficie esférica

d : Es la distancia del centro de la superficie esférica hacia el plano secante

*Circunferencia
mayor (máxima)*

Se determina cuando el plano secante contiene al centro de la superficie esférica

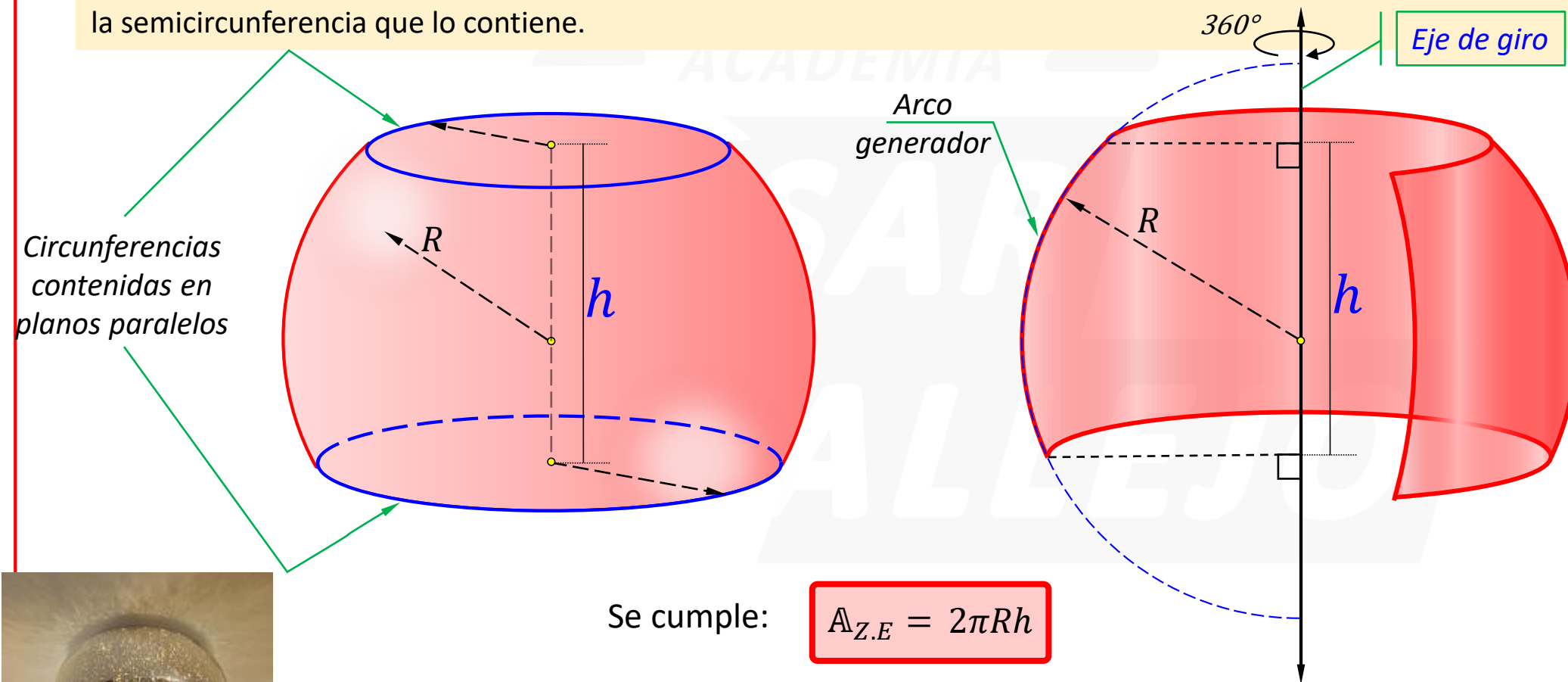
Ejemplo de circunferencia máxima.



SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

ZONA ESFÉRICA

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos. También puede considerarse como la superficie generada por un arco de circunferencia que gira respecto al diámetro de la semicircunferencia que lo contiene.



Algunas bolas de billar nos pueden ejemplificar la idea de la zona esférica.

Se cumple: $A_{Z.E} = 2\pi Rh$

Donde:

- $A_{Z.E}$: Área de la zona esférica
- h : altura de la zona esférica o proyección ortogonal del arco generador sobre el eje de giro

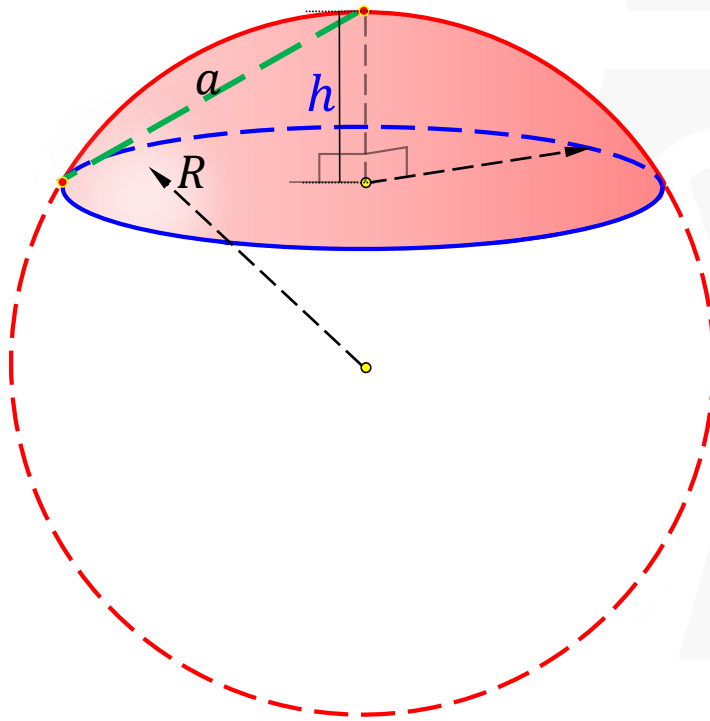


SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

CASQUETE ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica comprendida entre una circunferencia determinada por un plano secante.

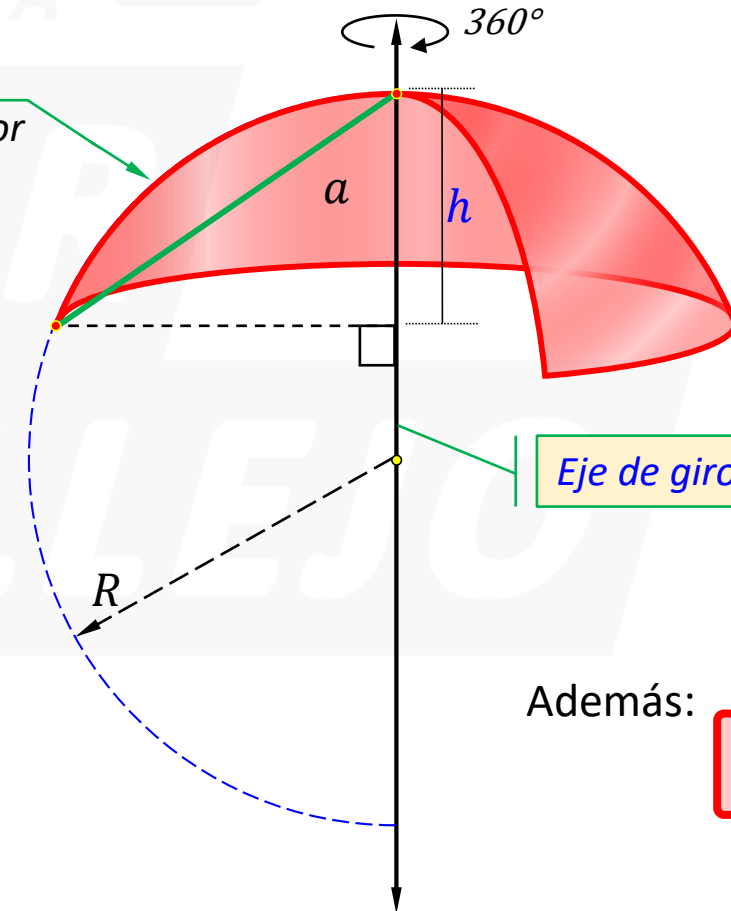
También puede considerarse como la superficie generada por un arco de circunferencia que gira respecto al diámetro de la semicircunferencia que lo contiene, donde un extremo del arco coincide con un extremo de su diámetro.



Se cumple:

$$A_{C.E} = 2\pi R h$$

Arco
generador



Eje de giro



Algunas lámparas de techo en sus diseños usan los casquetes esféricos.

Además:

$$A_{C.E} = \pi a^2$$

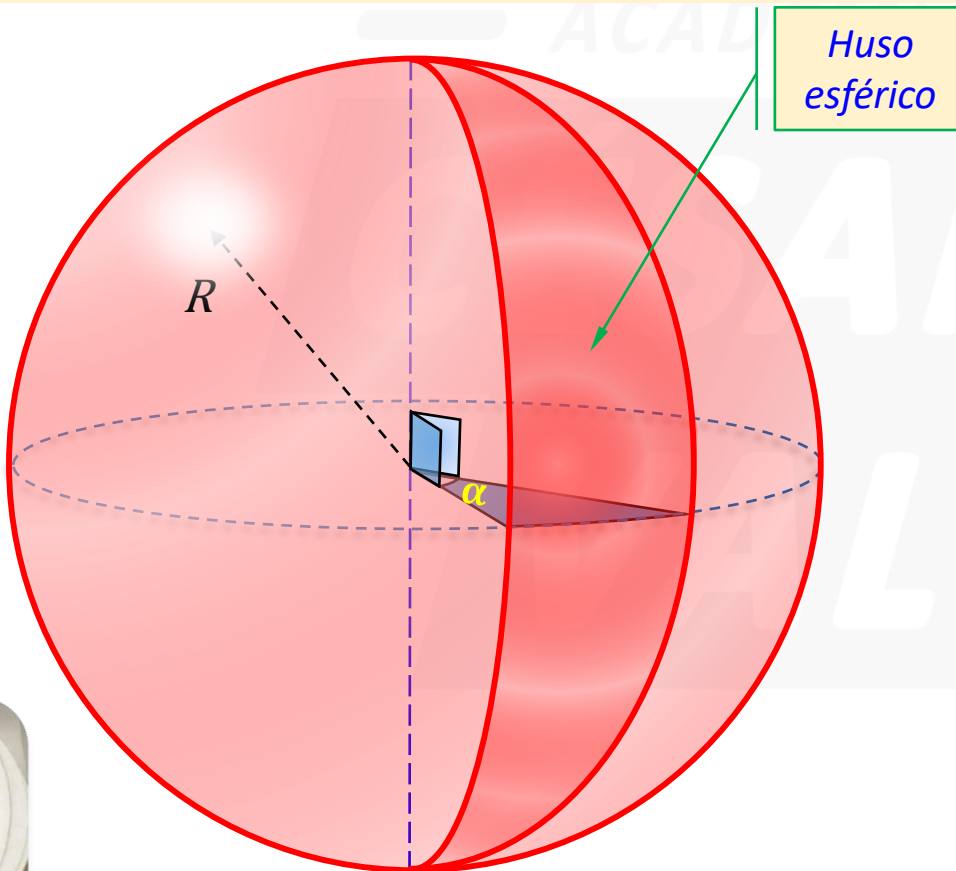
Donde:

- $A_{C.E}$: Área del casquete esférico
- h : altura del casquete esférico o proyección ortogonal del arco generador sobre el eje de giro

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tengan el mismo diámetro. También puede considerarse como la superficie generada por una semicircunferencia cuando gira respecto a uno de sus diámetros de tal manera que la medida del ángulo de giro sea menor a 360° .



En ciertos diseños de algunas lámparas también se usan los husos esféricos.

- Para calcular el área del Huso esférico, usaremos una regla de tres simple:

Área

$$4\pi R^2$$

$$A_{H.E}$$

Medida del α de giro

$$360^\circ$$

$$\alpha$$

- Despejamos $A_{H.E}$ y tenemos:

$$A_{H.E} = \frac{\alpha 4\pi R^2}{360^\circ}$$

$$\therefore A_{H.E} = \frac{\alpha \pi R^2}{90^\circ}$$

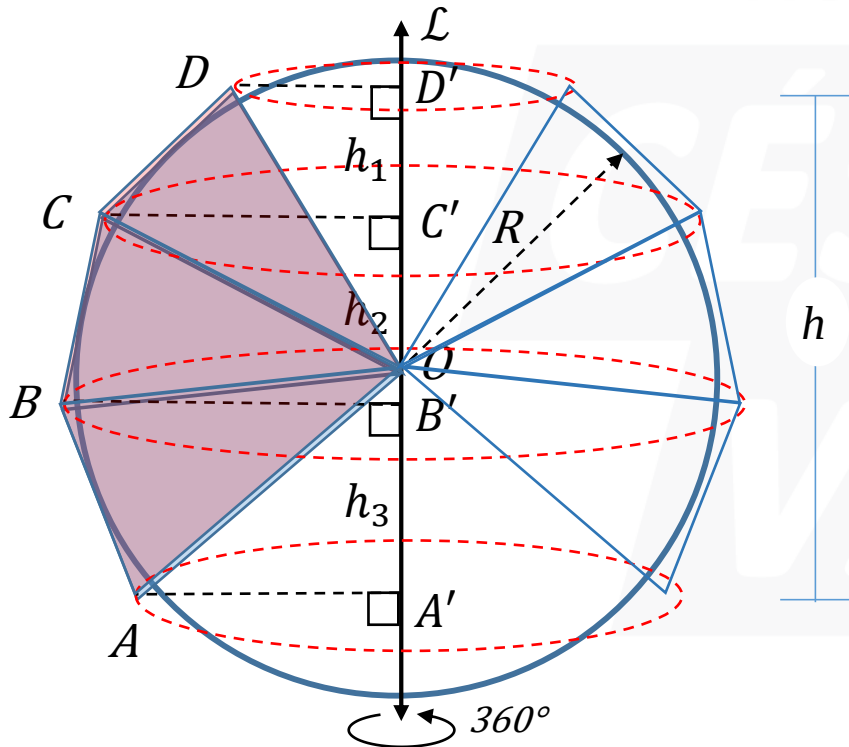
Donde:

- $A_{H.E}$: Área del huso esférico

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

TEOREMA DE ARQUIMEDES (SÓLIDO DE REVOLUCIÓN)

Cálculo del volumen del sólido que genera una región poligonal regular al girar respecto de una recta coplanar a dicha región.



$$V_{Sol. Gen(OABCD)} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

VOLUMEN DE UNA ESFERA

Si consideramos a la esfera, como el sólido generado por un semicírculo alrededor de su diámetro, aprovechando el teorema de Arquímedes en su caso general, se puede calcular el volumen de la esfera.

Semicírculo
generador

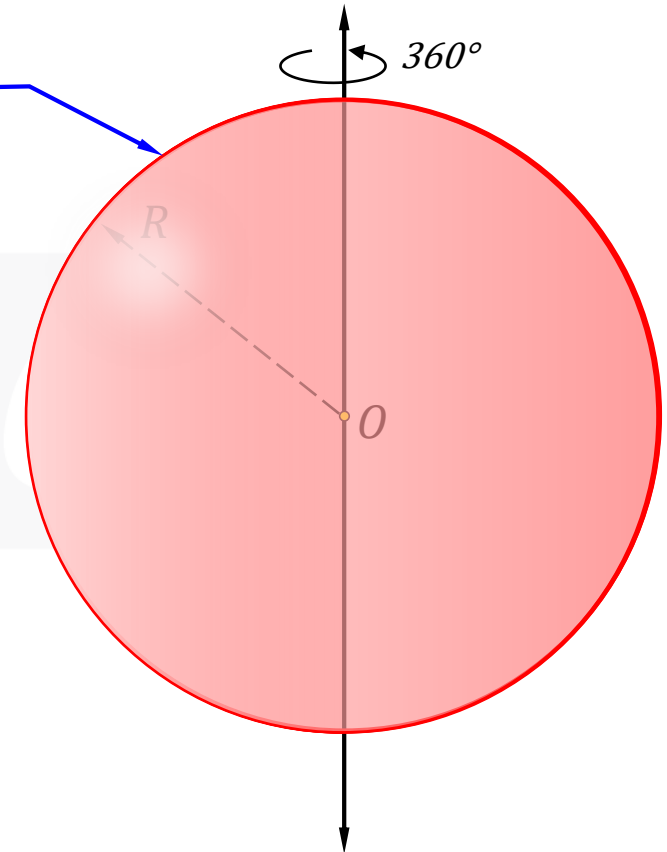
Se cumple:

$$V_{esf.} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Donde:

O: Centro de la esfera

R: Radio de la esfera



SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

ESFERA

Es aquel sólido geométrico limitado por una superficie esférica

Radio

Plano secante

Todo plano secante determina un círculo.

Plano tangente

T: punto de tangencia

Se cumple:

$$\overline{OT} \perp \blacksquare \text{ tangente}$$

Círculo menor

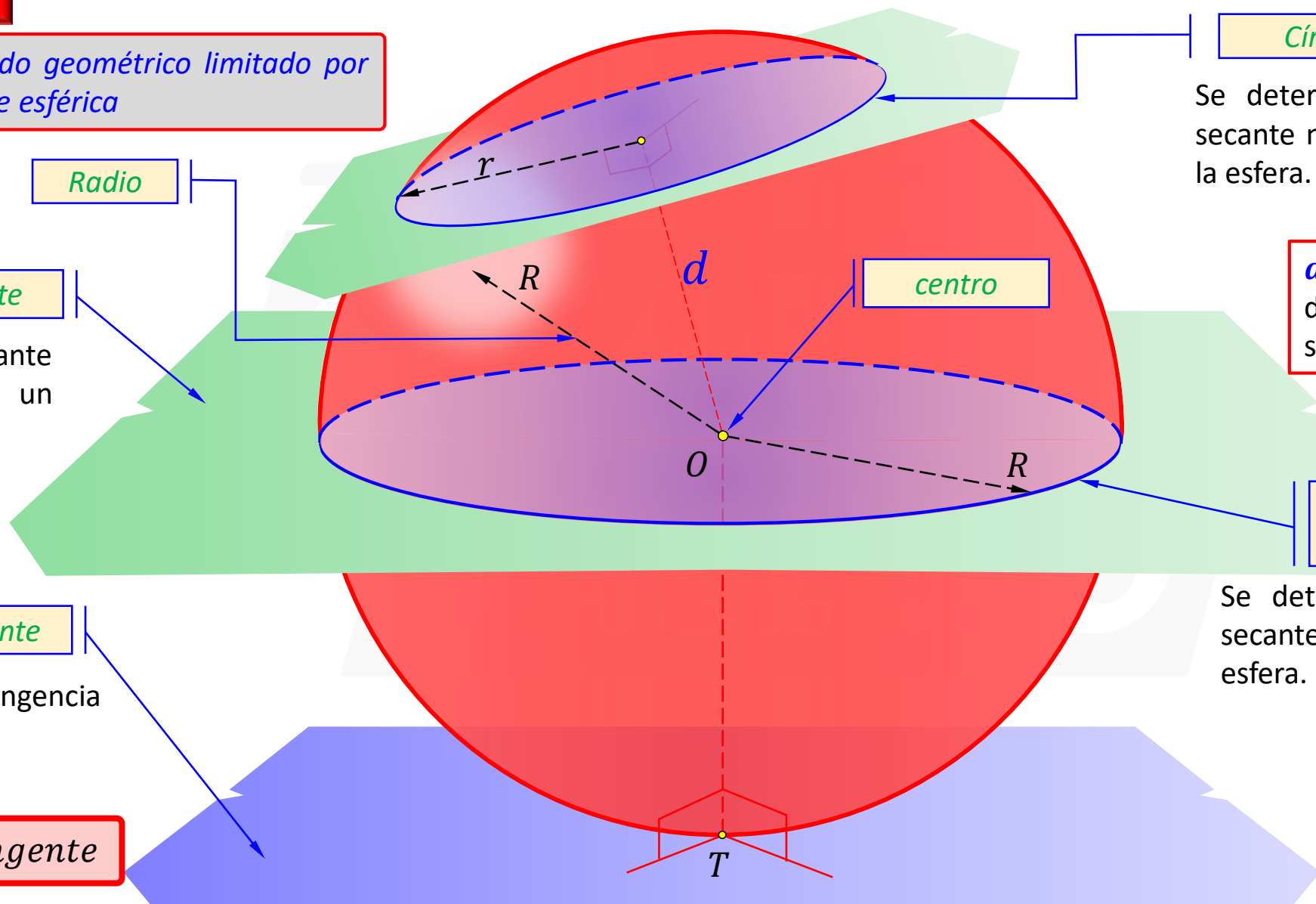
Se determina cuando el plano secante no contiene al centro de la esfera.

centro

d : Es la distancia del centro de la esfera hacia el plano secante

Círculo mayor (máximo)

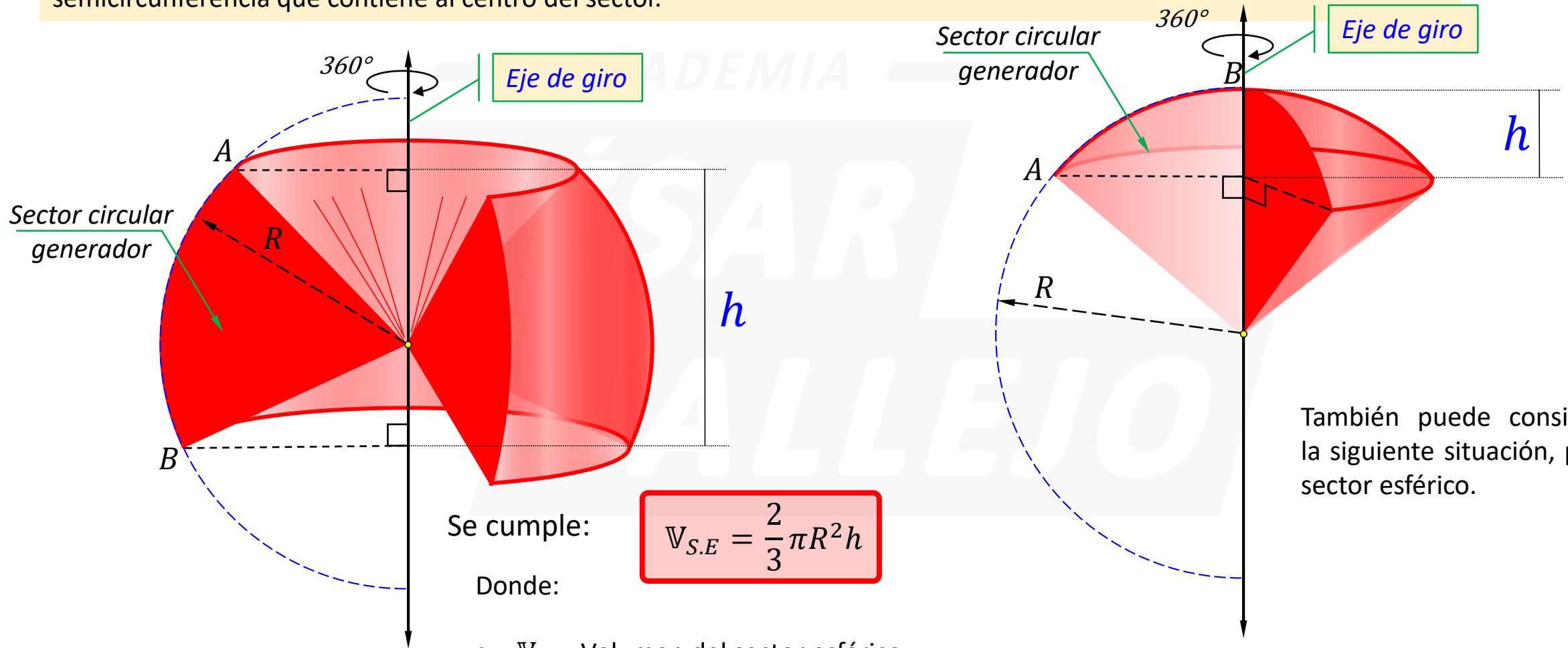
Se determina cuando el plano secante contiene al centro de la esfera.



SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

SECTOR ESFÉRICO

Es el sólido generado por la rotación de 360° de un sector circular en torno a una recta que contiene al diámetro de la semicircunferencia que contiene al centro del sector.



Se cumple:

$$V_{S.E} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

Donde:

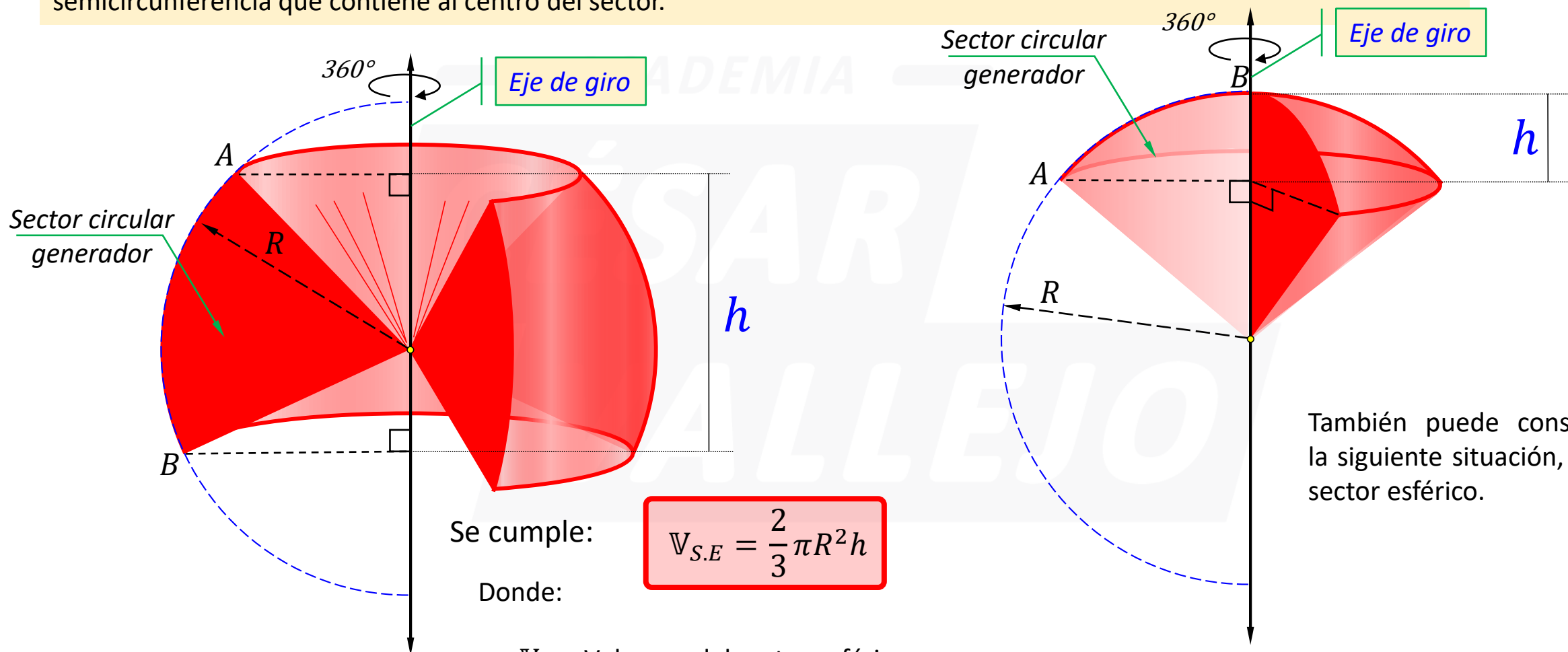
- $V_{S.E}$: Volumen del sector esférico
- h : longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro

También puede considerarse la siguiente situación, para un sector esférico.

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

SECTOR ESFÉRICO

Es el sólido generado por la rotación de 360° de un sector circular en torno a una recta que contiene al diámetro de la semicircunferencia que contiene al centro del sector.



Se cumple:

$$V_{S.E} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

Donde:

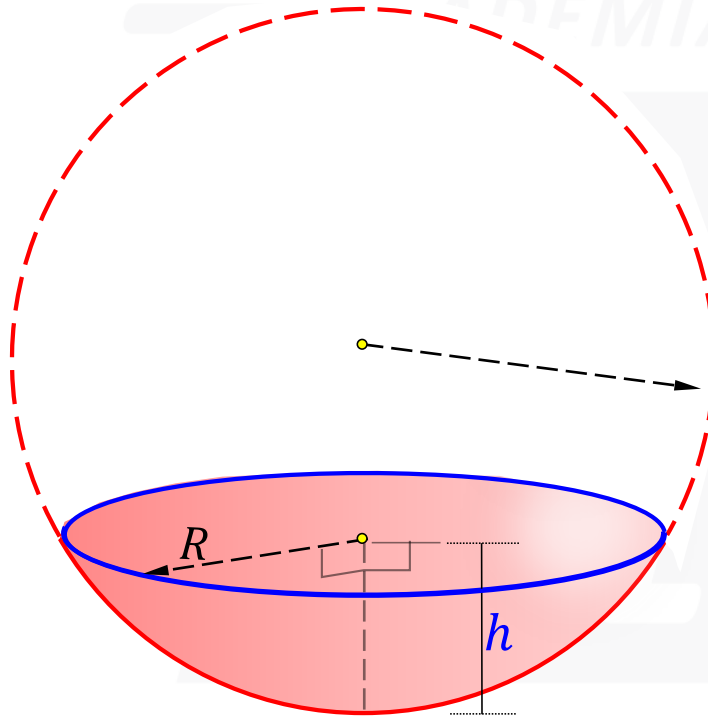
- $V_{S.E}$: Volumen del sector esférico
- h : longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro

También puede considerarse la siguiente situación, para un sector esférico.

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Es la porción de esfera determinada por un plano secante a la esfera.



Donde:

- $\mathbb{V}_{S.E. \text{ 1 base}}$: Volumen del segmento esférico de 1 base
- h : altura del segmento esférico

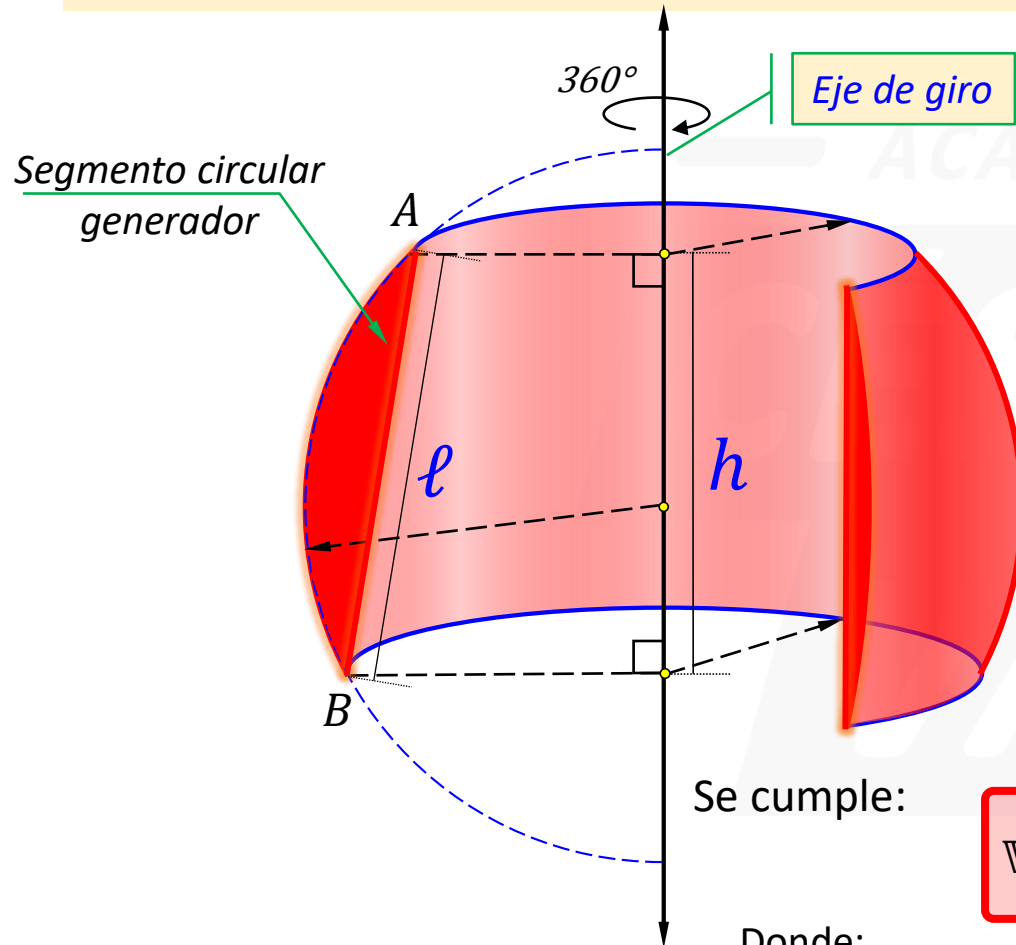
Se cumple:

$$\mathbb{V}_{S.E. \text{ 1 base}} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h R^2}{2}$$

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

ANILLO ESFÉRICO

Es el sólido generado por un segmento circular al girar 360° en torno a una recta coplanar que contiene al diámetro

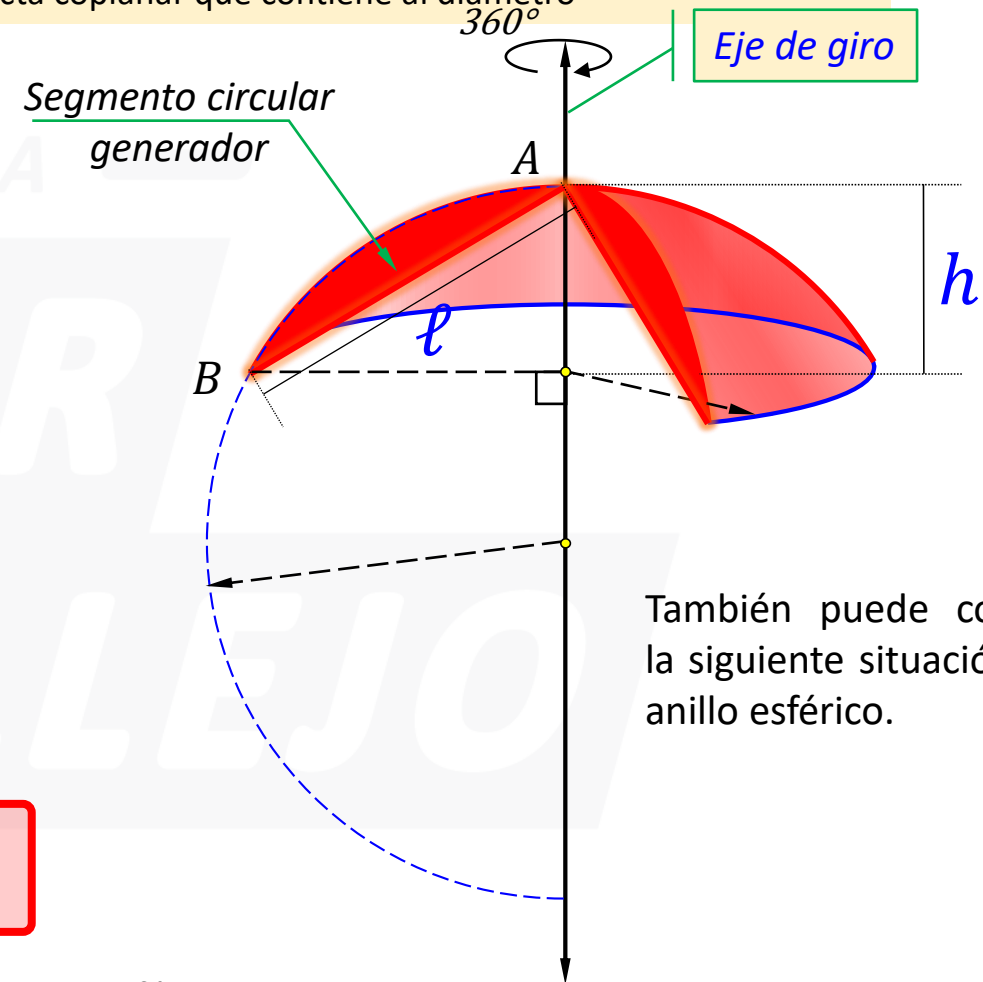


Se cumple:

$$V_{A.E} = \frac{\pi h \ell^2}{6}$$

Donde:

- $V_{A.E}$: Volumen del anillo esférico
- h : longitud de la proyección ortogonal de la cuerda AB el eje de giro.
- ℓ : longitud de la cuerda AB

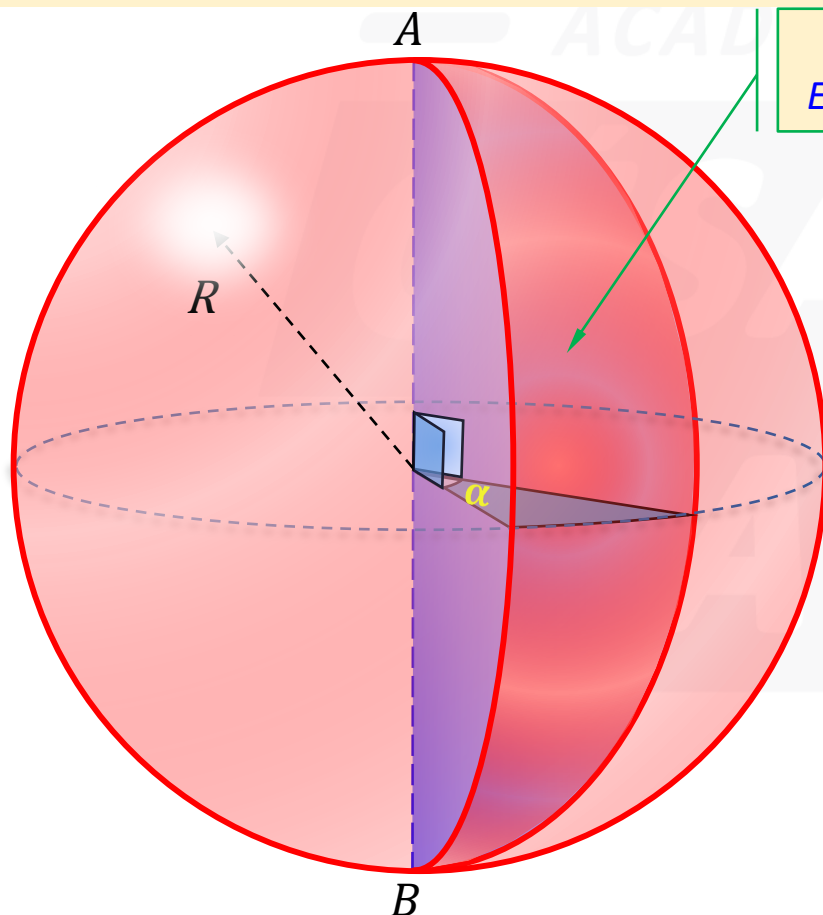


También puede considerarse la siguiente situación, para un anillo esférico.

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

CUÑA ESFÉRICA

Es la porción esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tengan el mismo diámetro. También puede considerarse como el sólido generado por un semicírculo cuando gira respecto a uno de sus diámetros de tal manera que la medida del ángulo de giro sea menor a 360° .



CUÑA
ESFÉRICA

- Para calcular el volumen de la cuña esférica, usaremos una regla de tres simple:

Volumen

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

$V_{C.E}$

Medida del α de giro

$$360^\circ$$

α

- Despejamos $V_{C.E}$ y tenemos:

$$V_{C.E} = \frac{\alpha 4\pi R^3}{(3)(360^\circ)}$$

$$\therefore V_{C.E} = \frac{\alpha \pi R^3}{270^\circ}$$

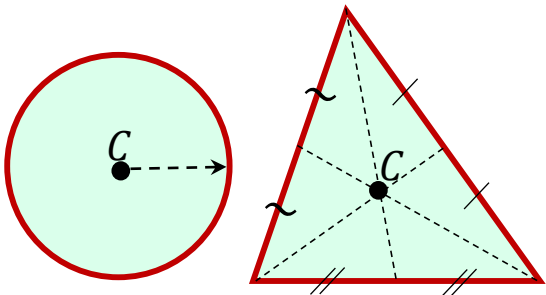
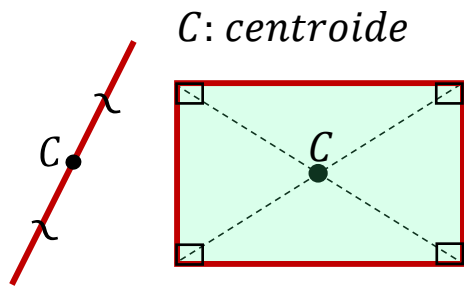
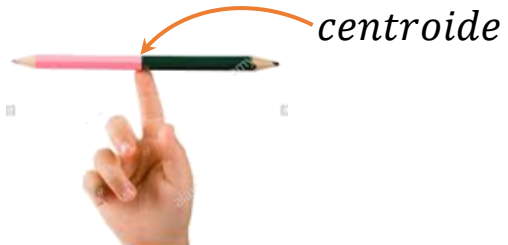
Donde:

- $V_{C.E}$: Volumen de la cuña esférica

SUPERFICIE ESFÉRICA, ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS

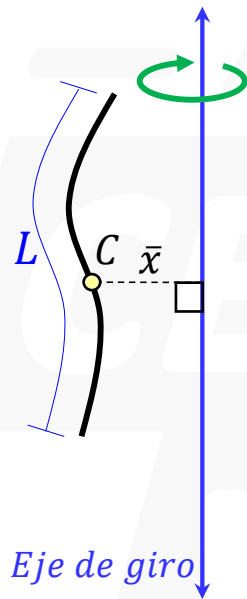
CENTROIDE(C)

Es el equivalente al centro de gravedad de una figura geométrica. Presentamos algunos casos comunes:



TEOREMA 1

C : centroide



superficie generada

Área de la superficie generada

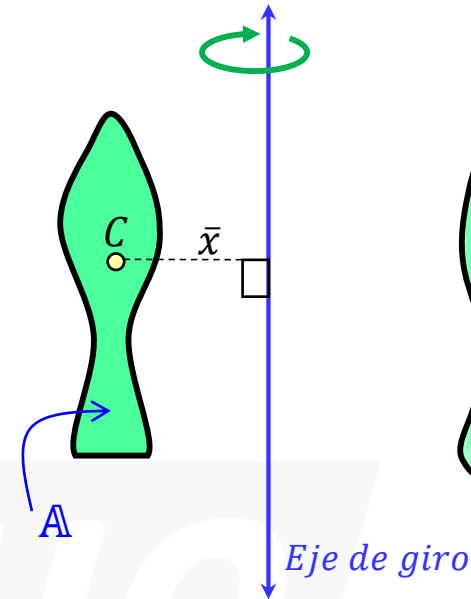
$$A_{S.G.} = 2\pi \bar{x} \cdot L$$

Donde: $\bar{x}$: distancia del centroide al eje de giro.

L : longitud de la línea generadora.

TEOREMA 2

C : centroide



sólido generado

Volumen del sólido generado

$$V_{S.G.} = 2\pi \bar{x} \cdot A$$

Donde: $\bar{x}$: distancia del centroide al eje de giro.

A : área de la región generadora.

— ACADEMIA —

CÉSAR

VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe